

На правах рукописи

ХОРОШЕВА Эльвира Александровна

**НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН
В КРУГЛОМ НЕЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОДЕ**

**01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление**

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ 2010

Работа выполнена на кафедре «Математика и суперкомпьютерное моделирование» Пензенского государственного университета.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,
профессор
Смирнов Юрий Геннадьевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Ильинский Анатолий Серафимович;
доктор физико-математических наук,
доцент
Карчевский Евгений Михайлович.

Ведущая организация – Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), г. Москва.

Защита диссертации состоится 18 ноября 2010 г., в 14 часов 30 минут, на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: Российская Федерация, 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета. Автореферат разослан и размещен на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета www.ksu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент

Липачев Е. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена решению нелинейной краевой задачи на собственные значения распространяющихся ТМ-поляризованных электромагнитных волн в круглом диэлектрическом волноводе с нелинейностью, выраженной законом Керра.

Актуальность темы.

Изучение задач распространения электромагнитных волн в нелинейных средах является актуальным в связи с тем, что эти явления находят широкое применение в физике плазмы, в современной микроэлектронике, оптике и лазерной технике. Кроме того, они представляют и самостоятельный математический интерес, поскольку такие задачи являются нелинейными краевыми задачами на собственные значения, общие методы решения которых недостаточно разработаны. Таким образом, прогресс в аналитическом исследовании подобных задач важен и с теоретической, и с практической точек зрения. Разработка численных методов для решения задач этого класса также является актуальной. Результаты аналитического исследования могут существенно помочь при разработке численных методов. Данное направление было и является предметом исследования многих авторов (В. П. Силин, П. Н. Елеонский, К. М. Leung, Н. W. Shurmann, В. С. Серов, Ю. В. Шестопапов, Ю. Г. Смирнов).

Цель работы:

– Строгая постановка задачи о распространении ТМ-поляризованных (собственных) волн в цилиндрических диэлектрических волноводах круглого сечения с нелинейным заполнением среды по закону Керра как краевой задачи на собственные значения для системы уравнений Максвелла.

– Разработка математического аппарата для исследования задачи о собственных волнах; доказательство базовых теоретических результатов о существовании решений дисперсионных уравнений и интегральных уравнений, отвечающих краевой задаче.

– Построение, обоснование и реализация эффективных численных методов для расчета собственных значений и соответствующих им собственных функций для поставленной задачи.

Научная новизна:

– впервые получено дисперсионное уравнение для задачи распространения электромагнитных ТМ-волн в нелинейном круглом волноводе с нелинейностью, выраженной законом Керра;

– предложен метод сведения нелинейной краевой задачи на собственные значения к решению дисперсионного уравнения и доказана теорема о спектральной эквивалентности краевой задачи и дисперсионного уравнения;

– доказаны базовые теоретические результаты о существовании и единственности решений дисперсионных уравнений (относительно спектрального параметра) и интегральных уравнений, отвечающих краевой задаче (относительно собственных функций);

– с помощью дисперсионного уравнения приближенно вычислены собственные значения и собственные функции краевой задачи.

Практическая значимость.

Большое практическое значение в представленной работе имеет полученное дисперсионное уравнение, анализ которого позволяет не только доказать существование решений краевой задачи (а значит, и исходной задачи о распространении волн), но и исследовать свойства распространяющихся ТМ-волн в зависимости от различных параметров. Кроме того, полученное дисперсионное уравнение может быть решено численно на компьютере. Систему дифференциальных уравнений задачи также можно записать в виде, удобном для численных расчетов. Таким образом, имеется возможность вычислять не только собственные значения краевой задачи, но и собственные функции, отвечающие этим собственным значениям, а, следовательно, изучать структуру поля электромагнитной волны.

Реализация и внедрение полученных результатов.

Результаты, полученные в диссертационной работе, включены в отчеты НИР и гранта, выполненных на кафедре «Математика и суперкомпьютерное моделирование»; грант Минобрнауки «Исследование трехмерных векторных задач электродинамики в нелинейных средах методом математического моделирования на многопроцессорных системах».

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на научных конференциях и семинарах:

– XXVIII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006);

– X Международной научно-методической конференции «Университетское образование» (Пенза, 2006);

– научном семинаре кафедры «Математика и суперкомпьютерное моделирование» Пензенского государственного университета;

– научном семинаре кафедры «Прикладная математика» Казанского федерального (Приволжского) университета.

Публикации.

По материалам диссертации опубликовано шесть печатных работ, список которых приведен в конце автореферата, две работы – в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации.

Работа состоит из введения, четырех глав, приложения и списка литературы, содержащего 90 наименований. Работа изложена на 98 страницах машинописного текста, содержит 6 графиков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы; излагаются краткое содержание и основные результаты работы.

Первая глава посвящена постановке задачи для распространяющихся поляризованных электромагнитных ТМ-волн в круглом нелинейном волноводе с нелинейностью, выраженной законом Керра. Из системы уравнений Максвелла выводится система дифференциальных уравнений, для которой в дальнейшем ставится краевая задача.

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть все трехмерное пространство R^3 заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1 = \text{const}$, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, а $\varepsilon_1 \geq 1$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды. В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < R^2\}$ радиуса R однородного заполнения с образующей, параллельной оси Oz , и поперечным круговым сечением.

Пусть диэлектрическая проницаемость ε внутри волновода определяется по закону Керра:

$$\varepsilon = (\varepsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2)\varepsilon_0,$$

где a и ε_2 – вещественные положительные константы; a – коэффициент нелинейности; ε_2 – постоянная составляющая проницаемости ε .

Среда предполагается изотропной и немагнитной, $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Требуется отыскать поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода, т.е. собственные волны структуры. Электромагнитное поле собственной волны \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных составляющих поля \mathbf{H}_τ и \mathbf{E}_τ при переходе через границу волновода и условиям экспоненциального затухания поля на бесконечности.

Перейдем к цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) . В случае ТМ-поляризации $\mathbf{E} = (E_\rho, 0, E_z)$, $\mathbf{H} = (0, H_\varphi, 0)$. Из уравнений Максвелла следует, что $E_z = E_z(\rho, z)$ и $E_\rho = E_\rho(\rho, z)$ не зависят от φ .

Решение задачи будем искать в форме осесимметричных волн:

$$E_\rho(\rho, z; \gamma) = e_\rho(\rho; \gamma)e^{i\gamma z}; \quad (2)$$

$$E_z(\rho, z; \gamma) = e_z(\rho; \gamma)e^{i\gamma z}; \quad (3)$$

$$H_\varphi(\rho, z; \gamma) = h_\varphi(\rho; \gamma)e^{i\gamma z}, \quad (4)$$

где γ – вещественная постоянная распространения волны.

Предполагаем, что внутри и вне волновода $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \tilde{\epsilon}\epsilon_0$, где $\tilde{\epsilon} \geq 1$ – относительная диэлектрическая проницаемость. Обозначим также $k_0^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$, где $k_0 > 0$ – волновое число вакуума.

Из уравнений Максвелла получим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\gamma e_\rho - \frac{\partial e_z}{\partial \rho} = i\omega\mu_0 h_\varphi; \\ \gamma h_\varphi = \omega\epsilon_0\tilde{\epsilon} e_\rho; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho h_\varphi) = -i\omega\epsilon_0\tilde{\epsilon} e_z. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим

$$e_\rho(\rho; \gamma) = u_1(\rho; \gamma), \quad (6)$$

$$ie_z(\rho; \gamma) = u_2(\rho; \gamma). \quad (7)$$

Будем предполагать, что $u_1(\rho; \gamma), u_2(\rho; \gamma)$ – вещественные функции.

Обозначая $k_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 - \gamma^2$, получим систему дифференциальных уравнений внутри волновода:

$$\begin{cases} -k_2^2 u_1 + \gamma u_2' = f_1; \\ -\gamma \cdot \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2')' - k_0^2 \varepsilon_2 u_2 = f_2, \end{cases} \quad (8)$$

где производная означает дифференцирование по ρ и

$$f_1 = k_0^2 a |\mathbf{u}|^2 u_1, \quad f_2 = k_0^2 a |\mathbf{u}|^2 u_2; \quad (9)$$

$$|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T. \quad (10)$$

Вне волновода $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_0$, $a = 0$, тогда

$$u_2 \equiv E_z = CK_0(k_1 \rho),$$

$$u_1 \equiv E_\rho = -\frac{\gamma}{k_1} CK_0'(k_1 \rho), \quad (11)$$

где $C = \text{const}$ – произвольная постоянная; $K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz)$ – функция Макдональда.

С учетом условий сопряжения на границе волновода

$$[u_2] = 0, \quad [\tilde{\varepsilon} u_1] = 0 \quad (12)$$

получим:

$$\varepsilon_2 u_1|_{\rho=R-0} - \varepsilon_1 u_1|_{\rho=R+0} + a u_1 |\mathbf{u}|^2|_{\rho=R-0} = 0. \quad (13)$$

Сформулируем *краевую задачу на собственные значения (задача P)*: требуется отыскать не равные одновременно тождественно нулю на полубесконечном интервале $\rho > 0$ функции $u_1(\rho), u_2(\rho)$ класса

$$u_1, u_2 \in C^2(0, R) \cap C^2(R, +\infty) \cap C[0, R] \cap C[R, +\infty)$$

и соответствующие собственные значения γ такие, что $u_1(\rho), u_2(\rho)$ удовлетворяют системе уравнений (8) на интервале $(0, R)$, уравнению

ям (11) на интервале $(R, +\infty)$, условиям сопряжения (12) и условиям экспоненциального убывания функций $u_1(\rho), u_2(\rho)$ на бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$. Спектральным параметром задачи является вещественное число γ .

Определение 1. Вещественное число γ называется собственным значением, отвечающим собственному вектору (собственным функциям) $(u_1(\rho), u_2(\rho))^T$, если при этом γ существует нетривиальное решение $u_1(\rho), u_2(\rho)$ краевой задачи P.

Во второй главе из системы нелинейных уравнений (8) получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu_2 \equiv (\rho u_2')' + k_2^2 \rho u_2 = \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \cdot \left(\frac{\gamma}{k_2^2} (\rho f_1)' - \rho f_2 \right), \quad (14)$$

с линейной частью $Lu_2 \equiv (\rho u_2')' + k_2^2 \rho u_2$, дифференциальный оператор которой определяется формулой $L = \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + k_2^2 \rho$.

Уравнение (14) перепишем в виде

$$(\rho u_2')' + k_2^2 \rho u_2 = F, \quad 0 < \rho < R, \quad (15)$$

где

$$F(\rho) = \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \left(\frac{\gamma}{k_2^2} (\rho f_1)' - \rho f_2 \right). \quad (16)$$

Построим функцию Грина для краевой задачи:

$$\begin{cases} LG = \delta(\rho - r), \\ G|_{\rho=0} - \text{ограничена}, G|_{\rho=R} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Получим

$$G(r, \rho) = \begin{cases} \frac{\pi}{2J_0(k_2 R)} (J_0(k_2 \rho) N_0(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) N_0(k_2 R)), & \rho \leq r \leq R, \\ \frac{\pi}{2J_0(k_2 R)} (N_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) N_0(k_2 R)), & r \leq \rho \leq R. \end{cases} \quad (18)$$

Из условий сопряжения следует *дисперсионное уравнение*:

$$\Delta(\gamma) \equiv \varepsilon_2 u_1(R-0) + a u_1(R-0) |\mathbf{u}(R-0)|^2 + \varepsilon_1 \frac{\gamma}{k_1} K_0'(k_1 R) = 0. \quad (19)$$

Внутри волновода при $r \in (0, R)$ решения имеют представление

$$\begin{cases} u_1(r) = -\frac{\gamma^2}{k_0^2 \varepsilon_2 k_2^2} \int_0^R \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \rho} \rho f_1 d\rho - \frac{\gamma}{k_0^2 \varepsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial r} \rho f_2 d\rho - \frac{1}{k_2^2} f_1(r) + h_1(r), \\ u_2(r) = -\frac{\gamma}{k_0^2 \varepsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial \rho} \rho f_1 d\rho - \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \int_0^R G \rho f_2 d\rho + h_2(r), \end{cases} \quad (20)$$

где

$$h_1(r) = \frac{\gamma R}{k_2^2} \frac{\partial^2 G(r, R)}{\partial \rho \partial r} K_0(k_1 R);$$

$$h_2(r) = R \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, R) K_0(k_1 R).$$

Для представления системы (20) в виде матричного оператора введем матрицу ядер:

$$K(r, \rho) = -\rho \begin{bmatrix} q_{11} G_{\rho r} & q_{12} G_r \\ q_{21} G_\rho & q_{22} G \end{bmatrix} \quad (21)$$

и матрицу коэффициентов

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} (\gamma/k_2)^2 & \gamma \\ \gamma & k_2^2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

а также матричный линейный интегральный оператор $K = \{K_{nm}\}_{n,m=1}^2$ с операторами K_{nm} , связанный с системой (24),

$$K \mathbf{g} = \int_0^R K(r, \rho) \mathbf{g}(\rho) d\rho, \quad (23)$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$.

Тогда система интегральных уравнений (20) может быть записана в операторном виде

$$\mathbf{u} = aK(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - aJ(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}, \quad (24)$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$, а оператор \mathbf{J} определяется формулой

$$\mathbf{J} = \frac{k_0^2}{k_2^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Операторы \mathbf{K}, \mathbf{J} являются линейными. Введем также линейные операторы $\mathbf{N} := a(\mathbf{K} - \mathbf{J})$ и $\mathbf{N}_0 := \mathbf{K} - \mathbf{J}$.

Будем рассматривать уравнение (24) в пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}[0, R] = C[0, R] \times C[0, R]$ с нормой $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}}^2 = \|u_1\|_C^2 + \|u_2\|_C^2$, где $\|u\|_C = \max_{x \in [0, R]} u(x)$.

Пусть $\Pi = (0, R) \times (0, R)$,

$$\bar{T}^+ = \{(r, \rho) \in \bar{\Pi}, \rho \geq r\}, \bar{T}^- = \{(r, \rho) \in \bar{\Pi}, \rho \leq r\}.$$

Под непрерывностью функции $f(r, \rho)$ в \bar{T}^+ (в \bar{T}^-) понимается, что для любой точки $(r_0, \rho_0) \in \bar{T}^+$ ($(r_0, \rho_0) \in \bar{T}^-$)

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0, \rho \rightarrow \rho_0 \\ (r, \rho) \in \bar{T}^+, (r_0, \rho_0) \in \bar{T}^+}} f(r, \rho) = f(r_0, \rho_0) \quad \left(\lim_{\substack{r \rightarrow r_0, \rho \rightarrow \rho_0 \\ (r, \rho) \in \bar{T}^-, (r_0, \rho_0) \in \bar{T}^-}} f(r, \rho) = f(r_0, \rho_0) \right).$$

Под непрерывностью функции $f(r, \rho)$ в $\bar{T}^- \setminus \{0\}$ понимается, что функция непрерывна во всех точках \bar{T}^- (в вышеуказанном смысле), за исключением точки $r = 0, \rho = 0$. При этом функция $f(r, \rho)$, непрерывная в \bar{T}^+ и в \bar{T}^- , не будет, вообще говоря, непрерывна в $\bar{\Pi}$.

Утверждение 1. Функции $k_{11}(r, \rho)$ и $k_{22}(r, \rho)$ непрерывны в квадрате $\bar{\Pi} = [0, R] \times [0, R]$. Функция $k_{12}(r, \rho)$ ограничена в $\bar{\Pi}$ и непрерывна в \bar{T}^+ и в $\bar{T}^- \setminus \{0\}$, функция $k_{21}(r, \rho)$ ограничена в $\bar{\Pi}$ и непрерывна в \bar{T}^+ и в \bar{T}^- .

Утверждение 2. Пусть интегральный оператор $K : C[0, R] \rightarrow C[0, R]$ задан формулой $K\varphi = \int_0^R K(x, y)\varphi(y)dy$ с кусочно-непрерывным в квад-

рате $[0, R] \times [0, R]$ ядром $K(x, y)$. Тогда он ограничен и верна оценка для его нормы

$$\|K\|_{C \rightarrow C} \leq M_0, \quad (26)$$

где

$$M_0 = \max_{x \in [0; R]} \int_0^R |K(x, y)| dy. \quad (27)$$

Утверждение 3. Пусть интегральный оператор $K : C[0, R] \rightarrow C[0, R]$ задан формулой $K\phi = \int_0^R K(x, y)\phi(y)dy$ с ограниченными в квадрате $[0, R] \times [0, R]$ ядрами $K_{nm}(x, y)$, заданными формулами (21) и (22). Тогда он ограничен и верна оценка для его нормы

$$\|K\|_{C \rightarrow C} \leq M, \quad (28)$$

где

$$M^2 = 2 \left(\max_{j=1,2} \|K_{1j}\|_{C \rightarrow C}^2 + \max_{j=1,2} \|K_{2j}\|_{C \rightarrow C}^2 \right). \quad (29)$$

Приближенные решения $\mathbf{u}^n(r) = (u_1^n(r), u_2^n(r))^T$, $r \in [0, R]$ системы интегральных уравнений (20) могут быть определены с помощью итерационного процесса метода сжимающих отображений

$$\begin{aligned} u_1^{n+1}(r) = & -\frac{a\gamma}{\varepsilon_2 k_2^2} \int_0^R \frac{\partial^2 G(r, \rho)}{\partial r \partial \rho} \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_1^n(\rho) d\rho - \\ & -\frac{a\gamma}{\varepsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_2^n(\rho) d\rho - \frac{ak_0^2}{k_2^2} \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_1^n(\rho) + h_1(r); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} u_2^{n+1}(r) = & -\frac{a\gamma}{\varepsilon_2 k_2^2} \int_0^R \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial \rho} \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_1^n(\rho) d\rho - \\ & -\frac{ak_2^2}{\varepsilon_2} \int_0^R G(r, \rho) \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_2^n(\rho) d\rho + h_2(r). \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $B_{r_0} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_0\}$ – шар радиуса r_0 с центром в нуле и выполнены два условия

$$q := 3ar_0^2 \|K - J\| < 1 \quad (31)$$

и

$$ar_0^3 \|K - J\| + \|h\| \leq r_0. \quad (32)$$

Тогда существует и единственное решение $u \in B_{r_0}$ уравнения (24) [или системы (20)], и последовательность приближенных решений $u^n \in B_{r_0}$ уравнения (24) [или системы (20)], определяемых посредством итерационного алгоритма

$$u^{n+1} = aK(|u^n|^2 u^n) - aJ(|u^n|^2 u^n) + h, \quad (33)$$

сходится в норме пространства $C[0, R]$ к (единственному) точному решению $u \in B_{r_0}$ уравнения (24) [или системы (20)] при любом начальном приближении $u^0 \in B_{r_0}$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q .

Рассмотрим вспомогательное числовое кубическое уравнение

$$\|N\| r_0^3 + \|h\| = r_0, \quad (34)$$

где норма оператора $\|N\| = a\|K - J\| > 0$.

Лемма 1. Если выполняется неравенство

$$0 \leq \|h\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3} \|N\|}, \quad (35)$$

то уравнение (34) имеет два неотрицательных решения r_* и r^* , $r_* < r^*$.

Теорема 2. Если $a \leq A^2$,

$$\text{где } A = \frac{2}{3} \frac{1}{\|h\| \sqrt{3} \|N_0\|} \quad (36)$$

и

$$\|N_0\| := \|K - J\| (> 0),$$

то уравнение (24) имеет единственное решение в шаре $B_{r_*} \equiv \{u : \|u\| \leq r_*\}$, являющееся непрерывной функцией

$$u \in C[0, R], \quad \|u\| \leq r_*.$$

В третьей главе доказано утверждение о существовании собственных значений для нелинейной задачи на собственные значения, т. е. существование решений дисперсионного уравнения (19) при некоторых достаточных условиях, наложенных на параметры задачи. Основным методом при доказательстве будет метод малого параметра.

Теорема 3. Пусть ядра матричного оператора $N = a(K - J)$ и правая часть \mathbf{h} уравнения (24) непрерывно зависят от параметра $\gamma \in \Gamma_0$, $N(\gamma) \subset C(\Gamma_0)$, $\mathbf{h}(\gamma) \subset C(\Gamma_0)$ на некотором отрезке Γ_0 вещественной числовой оси. Пусть также

$$\|\mathbf{h}(\gamma)\| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N(\gamma)\|}}. \quad (37)$$

Тогда решения $\mathbf{u}(\gamma)$ уравнения (24) при $\gamma \in \Gamma_0$ существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра γ , $\mathbf{u}(\gamma) \subset C(\Gamma_0)$.

Теорема 4. Пусть числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a$ удовлетворяют условиям $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ и $0 < a \leq a_0$,

$$\text{где} \quad a_0 = \min_{\gamma \in \Gamma} \left(\min_{\gamma \in \Gamma} A^2(\gamma), \frac{\min_{1 \leq l \leq 2, 1 \leq i \leq m} |g(\sqrt{\lambda_{li}})|}{C(\max_{\gamma \in \Gamma} r_*(\gamma))^3} \right), \quad (38)$$

$$A(\gamma) = \frac{2}{3} \frac{1}{\|\mathbf{h}(\gamma)\| \sqrt{3\|N_0(\gamma)\|}} \quad (39)$$

и выполняется условие

$$\lambda_{1m} > k_0^2 \varepsilon_1 \quad (40)$$

для определенного $m \geq 1$. Тогда существует, по крайней мере, m собственных значений $\gamma_i, i = 1, \dots, m$, $\sqrt{\lambda_{1i}} < \gamma_i < \sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i$ краевой задачи P .

В четвертой главе рассмотрен численный метод для отыскания приближенных решений нелинейной краевой задачи на собственные значения P .

Приближенные решения $\mathbf{u}^n(r) = (u_1^n(r), u_2^n(r))^T$ системы интегральных уравнений (20) могут быть определены с помощью итерационного процесса

$$\mathbf{u}^{n+1} = a(K - J)(\|\mathbf{u}^n\|^2 \mathbf{u}^n) + \mathbf{h}. \quad (41)$$

Утверждение 4. Пусть $\mathbf{u}^0 = (0, 0)^T$. Последовательность приближенных решений $\mathbf{u}^n = (u_1^n, u_2^n)^T$ системы уравнений (20), определяемых посредством итерационного алгоритма (41), существует и сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0, R]$ к (единственному) точному решению \mathbf{u} системы уравнений (24), и верна оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|\mathbf{h}\|, n \rightarrow \infty, \quad (42)$$

где $q := 3ar_*^2 \|\mathbf{K} - \mathbf{J}\| < 1$ – коэффициент сжатия отображения.

Теорема 5. Пусть существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a$, удовлетворяющие условиям $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0, 0 < a \leq a_0$, где a_0 определяется соотношением (38), и выполняется условие (40) для определенного $m \geq 1$. Тогда для каждого $n \geq 0$, существует, по крайней мере, m значений $\gamma_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяющих неравенствам $\sqrt{\lambda_{1i}} < \gamma_i^{(n)} < \sqrt{\lambda_{2i}} - \delta_i$ и являющихся корнями уравнения

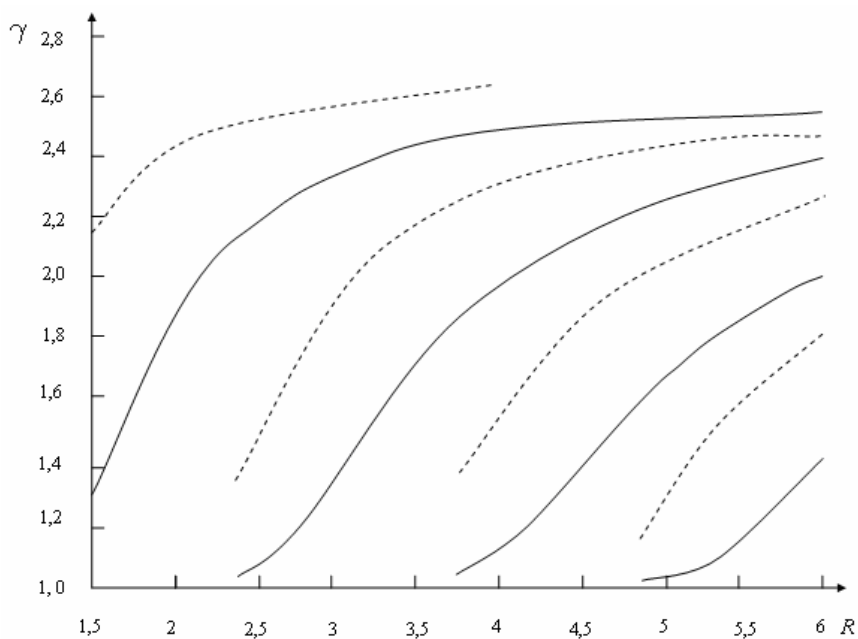
$$k_1^{(n)} \varepsilon_2 K_1(k_1^{(n)} R) J_0(k_2^{(n)} R) + k_2^{(n)} \varepsilon_1 K_0(k_1^{(n)} R) J_1(k_2^{(n)} R) = a F(\gamma^{(n)}), \quad (43)$$

где $k_1^{(n)} = \sqrt{(\gamma^{(n)})^2 - k_0^2 \varepsilon_1}$, $k_2^{(n)} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - (\gamma^{(n)})^2}$, а \mathbf{u}^n определяется соотношением (41).

Теорема 6. Пусть существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a$, удовлетворяющие условиям $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0, 0 < a \leq a_0$, где a_0 определяется соотношением (38), и выполняется условие (40) для определенного $m \geq 1$. Пусть γ_i и $\gamma_i^{(n)}$ соответственно точное и приближенное собственные значения проблемы P на отрезке Γ_i (γ_i и $\gamma_i^{(n)}$ – корни точного и приближенного дисперсионных уравнений, соответственно $i \leq m, m \geq 1$). Тогда $|\gamma_i^{(n)} - \gamma_i| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

На рисунке представлен график зависимости спектрального параметра γ от радиуса волновода для дисперсионного уравнения (19). Сплошными линиями на графике показана зависимость $\gamma(R)$, пунктирными – решения уравнения $J_0(k_2 R) = 0$ (полюса функции Грина).

Выбор параметров: диэлектрическая проницаемость среды вне волновода $\varepsilon_1 = 1$; диэлектрическая проницаемость среды внутри волновода $\varepsilon_2 = 7,2$; радиус волновода $1,5 \leq R \leq 6$; волновое число свободного пространства $k_0 = 1$; коэффициент нелинейности $a = 0,01$.



В заключении сформулированы основные результаты работы.

В приложении содержатся постановка и решение соответствующей линейной задачи о распространении ТМ-волн в волноводе, а также вывод дисперсионного уравнения для этого случая.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Нелинейная краевая задача на собственные значения, отвечающая процессу распространения поверхностных ТМ-поляризованных электромагнитных волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой, описываемой по закону Керра, сведена к эквивалентной задаче на собственные значения для системы интегральных уравнений.

2. Доказано существование единственного решения системы интегральных уравнений при фиксированных значениях спектрального параметра при выполнении определенных достаточных условий.

3. Получено дисперсионное уравнение, спектрально эквивалентное исходной краевой задаче на собственные значения; доказаны теоремы о существовании и локализации собственных значений нелинейной краевой задачи.

4. Предложен итерационный численный алгоритм для нахождения приближенных собственных значений и приближенных собственных функций нелинейной краевой задачи; доказана сходимость приближенных собственных значений и приближенных собственных функций к точным собственным значениям и собственным функциям задачи; выполнены численные расчеты приближенных собственных значений и приближенных собственных функций для различных значений параметров.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Хорошева, Э. А. Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Э. А. Хорошева // Тр. XXVIII конф. молодых ученых механико-математического факультета МГУ. – М. : МГУ, 2006. – С. 218–223.

2. Хорошева, Э. А. Распространение электромагнитных ТМ-волн в цилиндрических диэлектрических волноводах с нелинейной средой, выраженной законом Керра / Э. А. Хорошева // Надежность и качество : тр. Междунар. симп. В 2 томах. Том 1 / под ред. Н. К. Юркова. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2006. – 410 с.

3. Хорошева, Э. А. О распространении электромагнитных ТМ-волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Э. А. Хорошева // Надежность и качество : тр. Междунар. симп. В 2 томах. Том 1 / под ред. Н. К. Юркова. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2006. – 410 с.

4. Хорошева, Э. А. Применение функций Грина к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений / Э. А. Хорошева // Университетское образование : сб. ст. X Междунар. науч.-метод. конф. – Пенза, 2006. – С. 58–60.

5. Хорошева, Э. А. Распространение электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Э. А. Хорошева, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2006. – № 5. – С. 106–114.

6. Хорошева, Э. А. Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Э. А. Хорошева, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1. – С. 2–13.

Научное издание

Хорошева Эльвира Александровна

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН
В КРУГЛОМ НЕЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОДЕ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Редактор *Т. В. Веденеева*
Корректор *Н. А. Сидельникова*
Компьютерная верстка *С. В. Денисовой*

Подписано в печать 08. 10.10. Формат 60х84¹/16.
Усл. печ. л. 1,05. Тираж 100. Заказ № 615.

Издательство ПГУ
440026, Пенза, Красная, 40.